第5，6回 非線形方程式

1．基本的事項

❍ 基本的事項

- 直接法

  解析解が存在し，それを有限回の手続きで求める．丸め誤差がなければ解析解と一致．

  例）ガウス-ジョルダン法，ガウス消去法など

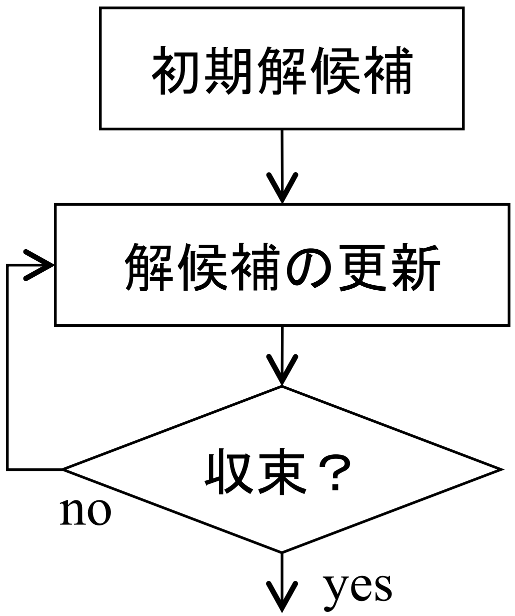
- 反復法

  解析解が存在しない場合や，解析解は存在するが直接的には求めにくい場合に使われる．

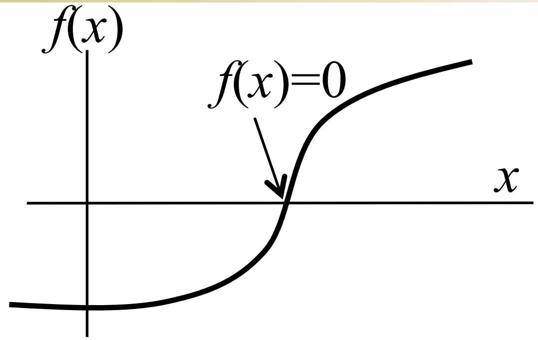
  適当な解候補から出発して，解候補の後進手続きを繰り返し，解に収束させる．

  打ち切り誤差が生じる．

  例）ニュートン法（非線形方程式の解法），ガウス-ザイデル法（連立一次方程式の反復解法）など



1. 基本的事項



❍ 線形方程式

$$f(x) = ax + b = 0$$

❍ 非線形方程式

・ 代数方程式

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0, \quad n > 1$$

・ 超越方程式

代数方程式では表されないもの．例えば指数関数や三角関数を含むもの．

有限解の手続きで解を求めるアルゴリズムは一般には存在しない．（代数方程式の場合，解の公式は4次までしかない）

$$\Downarrow$$

反復法を用いる．（存在する解のうち，一つの解を探索する）

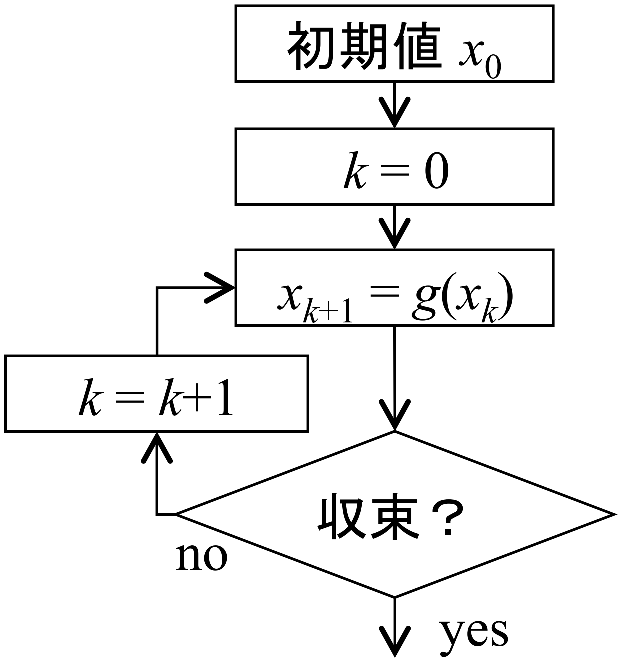
❍ 反復法

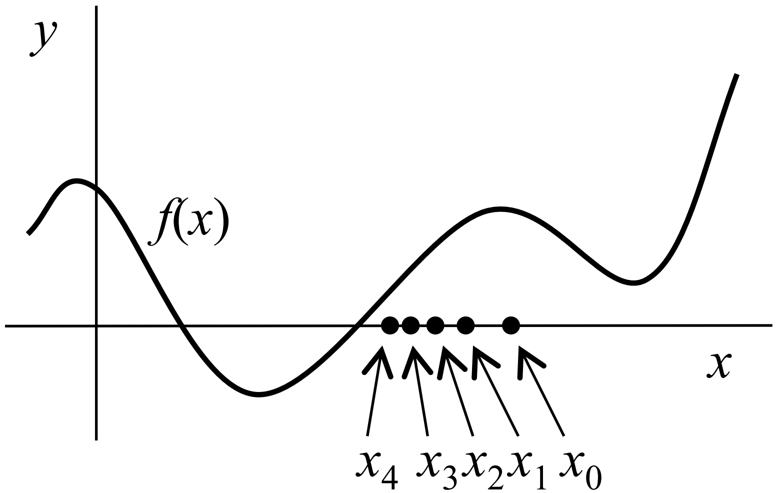
初期値 x_0

$k := 0, 1, 2, \cdots$

$x_{k+1} = g(x_k)$　　g(x)は解候補の更新規則

収束判定し、収束したと判断すれば終了





1. 基本的事項

・収束判定の方法

（本当に評価したいのは $|x_{k+1} - x^*|$ だが，解 x^* は未知）

a. $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ --- 解の更新幅を評価

欠点：ε をどう決めればよいか不明確.

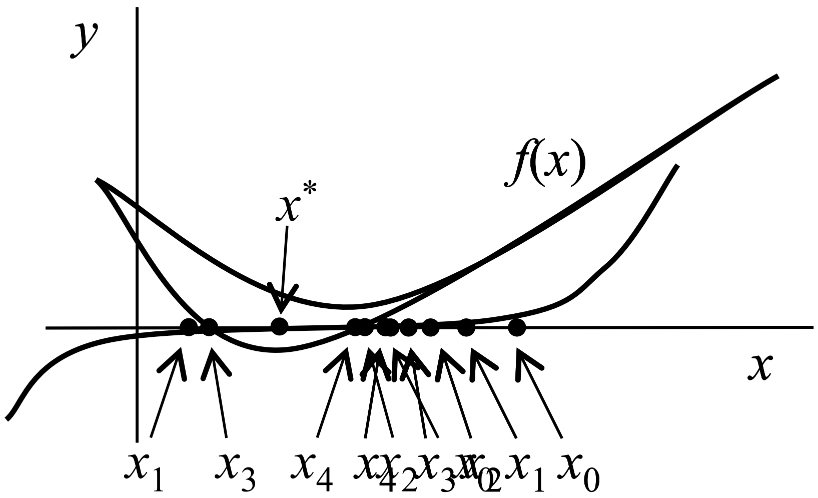
解 x^* に収束したとは限らない.

b. $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon\,|x_k|$ --- 更新幅を $|x_k|$ の大きさでスケーリングして評価

欠点：a と同様

c. $|f(x_{k+1})| < \varepsilon$ --- 関数 $f(x)$ の値を評価

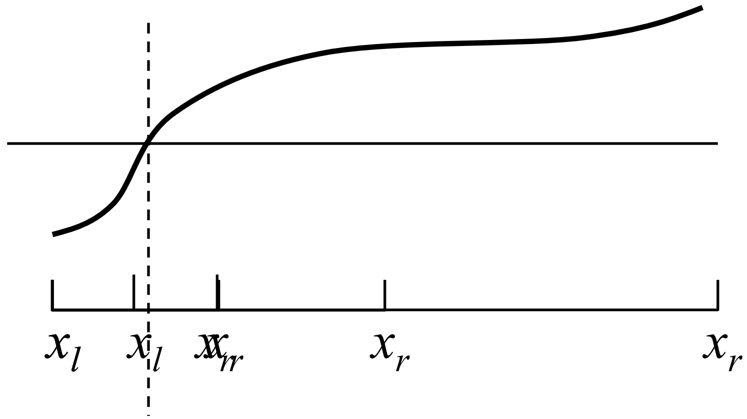
欠点：$f(x_k) \approx 0$ であっても，収束したとは限らない



2. 超越方程式の解法

❍ 2分法

$f(x_l)\,f(x_r) < 0$ ならば，区間 $[x_l, x_r]$ に $f(x) = 0$ の解が存在する.



❍ アルゴリズム：2分法

$[x_l, x_r]$ を初期区間とする（この中に解が存在する）。

$$x_e := \frac{x_l + x_r}{2}$$

$$\begin{cases} f(x_\mathrm{e})\,f(x_\mathrm{r}) < 0 \text{のとき} & x_l := x_\mathrm{e} \\ f(x_\mathrm{e})\,f(x_l) < 0 \text{のとき} & x_r := x_\mathrm{e} \end{cases}$$

収束判定⇒終了

2. 超越方程式の解法

- 次の方程式について，$f(x)=0$ の解を，二分法で求めよ.
  初期区間は $[0,3]$ とせよ.
  反復回数が 1, 2, 3, 4 の時の二分法の進む様子を図に描け.

  - $f(x) = x^2 - 2$
  - $f(x) = x^2 - 3$
  - $f(x) = x^2 - 5$
  - $f(x) = x^2 - 7$

2. 超越方程式の解法

❍ 2分法のプログラム例

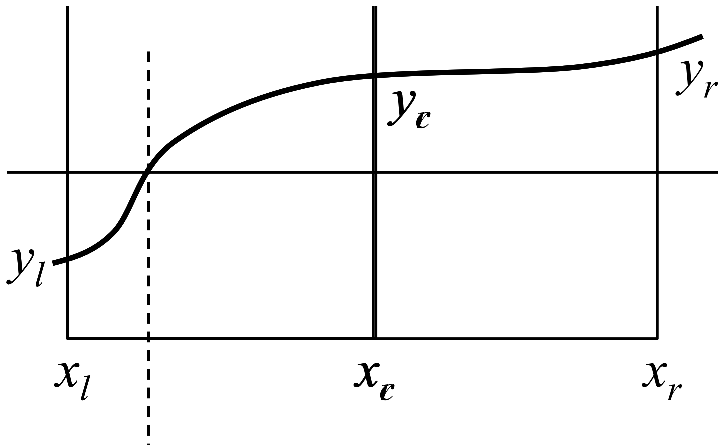
$$f(x)=\sqrt{1-x^2}-x$$

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

double f(double x)
{
        return sqrt(1.0-x*x)-x;      /* こちらをコメントにし， */
       /*return sqrt(1.0-x)-x;*/     /* こちらのコメントを外すと，こちらの関数が計算される */
}

main()
{
        double xc,xl,xr;
        double yc,yl,yr;
        int i,n=20;    /* 反復回数を 20 とする */

        xl=-1.0;  yl=f(xl);
        xr= 1.0;  yr=f(xr);
        for(i=0;i<n;i++)
        {
                xc=0.5*(xl+xr);
                yc=f(xc);
                printf("%lf:%lf %lf:%lf %lf:%lf\n",xl,yl,xc,yc,xr,yr);
                if(yc*yr<0.0) { xl=xc; yl=f(xl); }
                else { xr=xc; yr=f(xr); }
        }
        yc=f(xc);
        printf("%lf %lf\n",xc,yc);
}
```

収束判定はせず，
一定回数(n=20)反復
して終了

2. 超越方程式の解法

```
double xc,xl,xr;
double yc,yl,yr;
int i,n=20;    /* 反復回数を 20 とする */

xl=-1.0;  yl=f(xl);
xr= 1.0;  yr=f(xr);
for(i=0;i<n;i++)
{
        xc=0.5*(xl+xr);
        yc=f(xc);
        printf("%lf:%lf %lf:%lf %lf:%lf\n",xl,yl,xc,yc,xr,yr);
        if(yc*yr<0.0) { xl=xc; yl=f(xl); }
        else { xr=xc; yr=f(xr); }
}
yc=f(xc);
printf("%lf %lf\n",xc,yc);
```



2. 超越方程式の解法

計算機演習

$$f(x)=\sqrt{1-x^2}-x \quad \text{および} \quad f(x)=\sqrt{1-x}-x$$

について $f(x)=0$ の $x\in[0,1]$ における解を，二分法で求めよ.
初期区間は [0,1] とせよ.
反復回数が 1, 2, 3, ..., 20 の時の二分法の出す解を表示し，解の精度がどのように上がっているか確認せよ.

プログラムのコンパイルの方法

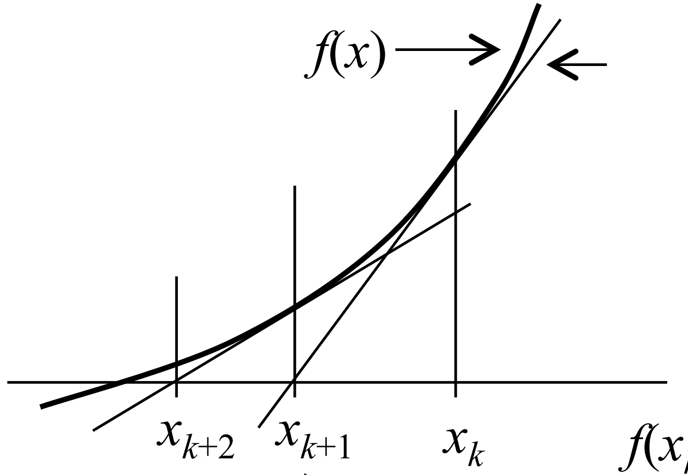
gcc xxx.c –o xxx –lm　　　　gcc xxx.c –lm

実行の方法

./xxx　　　　./a.out

2. 超越方程式の解法

❍ ニュートン法（ニュートン-ラフソン (Newton-Raphson) 法）



$f(x)$ の一次近似

$f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)$

$f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k) = 0$ を解く

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

・アルゴリズム：ニュートン法

x_0 : 求めたい解に十分近い初期値（初期解候補）

$k := 0, 1, 2, \cdots$

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

収束判定⇒終了

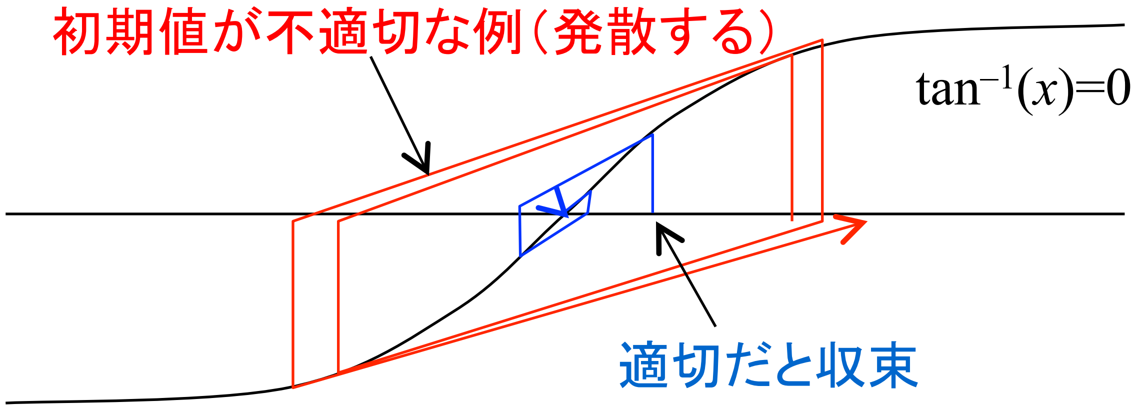
2. 超越方程式の解法

- 次の方程式について，$f(x) = 0$ の解を，ニュートン法で求めよ．初期値は x=3とせよ．
  反復回数が 1, 2, 3 の時のニュートン法の進む様子を図に描け．簡単のため，各計算は小数点以下3桁程度の精度でよい．

  - $f(x) = x^2 - 2$
  - $f(x) = x^2 - 3$
  - $f(x) = x^2 - 5$
  - $f(x) = x^2 - 7$

2. 超越方程式の解法

- 多くの場合，初期値が適切であればニュートン法は高速に解を求めることができる



- $f'(x_k)$ が計算しにくい場合，その代用として例えば以下を用いる．

- $f'(x_0)$：フォン・ミーゼ（von Mises）法
- $\dfrac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$ ：セカント法

3. 収束の速さ

- $\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$ のとき，十分大きな k についての $|x_{k+1}-\alpha|$ と $|x_k-\alpha|$ との関係により収束の速さが定義される．

- <u>一次収束</u>　$|x_{k+1}-\alpha| \le a|x_k-\alpha|,\quad 0<a<1$ …収束比
- <u>超一次収束</u>　$\lim_{k\to\infty}\dfrac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|}=0$　収束比が a_k で，$\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ となる場合
- <u>p 次収束</u>　$|x_{k+1}-\alpha| \le a|x_k-\alpha|^p,\quad 0<a<\infty,\quad p>1$：収束の次数

❍ ニュートン法の収束の速さ

式 (3) の両辺から α を引くと

$$x_{k+1} - \alpha = (x_k - \alpha) - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{(x_k - \alpha)f'(x_k) - f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

$f(\alpha)$ が x_k の周りのテイラー展開にて，2 次の項までで近似できるとして，

$$f(\alpha) = f(x_k) + (\alpha - x_k)f'(x_k) + \frac{1}{2}(\alpha - x_k)^2 f''(x_k)$$

となる．今 α は解なので $(\alpha = x^*)$，$f(\alpha) = 0$ となる．これより次式が得られる．

$$-f(x_k) = -(x_k - \alpha)f'(x_k) + \frac{1}{2}(x_k - \alpha)^2 f''(x_k)$$

これを，式 (7) 最右辺に代入し

$$x_{k+1} - \alpha = \frac{f''(x_k)}{2f'(x_k)}(x_k - \alpha)^2$$

を得る．

3. 収束の速さ

$$x_{k+1} - \alpha = \frac{f''(x_k)}{2f'(x_k)}(x_k - \alpha)^2$$

接線傾き $|f'(x_k)|$ の下限，および，曲率 $|f''(x_k)|$ の上限が，ある定数 A,B について

$$\begin{cases} \underline{0 < A \leq |f'(x_k)| \quad \cdots \quad \text{接線の傾きの下限が } A} \\ |f''(x_k)| \leq B \quad \cdots \quad \text{曲率の上限が } B \end{cases}$$

いつも成立している訳ではない．重根の場合は成立しない．

となるものとすると，

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq \frac{B}{2A}(x_k - \alpha)^2$$

が得られ，ニュートン法は 2 次収束することがわかる．

高速

2分法は1次収束

3. 収束の速さ

・一次収束の様子

0. 167352974947628. .

0. 125675473967819. .

0. 123863059723107. .

0. 123495639874539. .

0. 123459779542689. .

0. 123456345968652. .

0. 123456759543871. .

⇩

0. 123456789012345. .

解

・2次収束の様子

0. 167352974947628. .

0. 125675473967819. .

0. 123463059723107. .

0. 123456789874539. .

0. 123456789012345. .

⇩

0. 123456789012345. .

解

プログラム例 ニュートン法

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

double f(double x)
{
        return sqrt(1.0-x*x)-x;
       /*return sqrt(1.0-x)-x;*/
}
double df(double x)
{
        return /* ここに f(x) の導関数を記述する */ ;
}

main()
{
        double x, y,dy;
        int i,n=10;    /* 反復回数を 10 とする */

        x=0.5;         /* 初期解候補を 0.5 とする */
        for(i=0;i<n;i++)
        {
                y=f(x);
                dy=df(x);
                printf("%lf %lf %lf\n",x,y,dy);
                x-=y/dy;
        }
        y=f(x);
        printf("%lf %lf\n",x,y);
}
```

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} - x$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

プログラム例 ニュートン法

計算機演習

$$\text{(a)}\ f(x)=\sqrt{1-x^2}-x \quad \text{初期解}=0.5 \quad \cdots \quad f'(x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-1$$

$$\text{(b)}\ f(x)=(x-0.3)^3 \quad \text{初期解}=0.5 \quad \cdots \quad f'(x)=3(x-0.3)^2$$

$$\text{(c)}\ f(x)=\tan^{-1}(x-0.3)\ \left(\text{c 言語では atan}(x)\right) \quad \text{初期解}=\begin{Bmatrix}1.0\\2.0\end{Bmatrix}$$

$$\cdots \quad f'(x)=\frac{1}{1+(x-0.3)^2}$$

について $f(x)=0$ の解を，ニュートン法で求めよ.

反復回数は適宜設定せよ

各反復においてニュートン法の出す解を表示し，解の精度がどのように上がっているか確認せよ.

二分法の場合と比較せよ. 二分法の初期区間は[–1.0, 1.0] とせよ.

(b)は収束が遅い例（解が重根になっている）.
(c) は初期値が不適当だと発散する.