第4回　連立一次方程式(2) － ガウス消去法

1. 連立方程式

❍ ガウス-ジョルダン法

$$
\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

I を目指して
A に基本行演算を
行っていく

$$A\,\boldsymbol{x} = b$$

$$\Downarrow$$

$$E_1\,A\,\boldsymbol{x} = E_1\,b$$

$$\Downarrow$$

$$E_2E_1\,A\,\boldsymbol{x} = E_2E_1\,b$$

$$\Downarrow$$

$$\vdots$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{E_kE_{k-1}\ldots E_2E_1\,A}_{I}\,\boldsymbol{x} = E_kE_{k-1}\ldots E_2E_1\;b$$

$$\boldsymbol{x} = E_kE_{k-1}\ldots E_2E_1\;b$$

同じ基本行演算を
b に対して
行っていく

1. 連立方程式

❍ ガウス-ジョルダン法

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

I を目指して
A に基本行演算を
行っていく

$$A\,\boldsymbol{x} = b$$

$$\Downarrow$$

$$E_1\,A\,\boldsymbol{x} = E_1\,b$$

$$\Downarrow$$

$$E_2 E_1\,A\,\boldsymbol{x} = E_2 E_1\,b$$

$$\Downarrow$$

$$\vdots$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1\,A}_{U}\,\boldsymbol{x} = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1\,b$$

$$U\,\boldsymbol{x} = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1\,b$$

同じ基本行演算を
b に対して
行っていく

2. ガウス消去法

- 基本方針
  - 前進消去

U は上三角行列

U を目指して
A に基本行列演算を
行っていく

$$A\boldsymbol{x} = b$$

$$E_1 A\boldsymbol{x} = E_1 b$$

$$E_2E_1 A\boldsymbol{x} = E_2E_1 b$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{E_kE_{k-1}\ldots E_2E_1 A}_{U}\boldsymbol{x} = E_kE_{k-1}\ldots E_2E_1\ b$$

$$U\boldsymbol{x} = E_kE_{k-1}\ldots E_2E_1\ b$$

同じ基本行演算を
b に対して
行っていく

I にするよりも，U にする方が計算の手間が少なくてすむ

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} & \cdots & u_{1,n-1} & u_{1,n} \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & u_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = E_k \cdots E_2E_1 \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

2. ガウス消去法

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} & \cdots & u_{1,n-1} & u_{1,n} \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & u_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = E_k \cdots E_2 E_1 \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}$$

U だと後で
困らないか？

⇨

そうたいして困らない！
全体の計算量としては少なくてすむ

上の式を書き換えると

$$\begin{aligned} u_{1,1}x_1 + \cdots + u_{1,n-1}x_{n-1} + u_{1,n}x_n &= y_1 \\ &\vdots \\ u_{n-1,n-1}x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n &= y_{n-1} \\ u_{n,n}x_n &= y_n \end{aligned}$$

2. ガウス消去法

- 後退代入

$$
\begin{aligned}
u_{1,1}x_1 + \cdots + u_{1,n-1}x_{n-1} + u_{1,n}x_n &= y_1 \\
&\vdots \\
u_{n-1,n-1}x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n &= y_{n-1} \\
u_{n,n}x_n &= y_n
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

x_k の値を下から順に計算する.

$$
\Uparrow
\begin{aligned}
x_1 &= \left(y_1 - u_{1,2}x_2 - \cdots - u_{1,n}x_n\right)/u_{1,1} \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= \left(y_{n-1} - u_{n-1,n}x_n\right)/u_{n-1,n-1} \\
x_n &= \left(y_n\right)/u_{n,n}
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$x_k = \left(y_k - \sum_{j=k+1}^{n} u_{k,j}x_j\right)\Bigg/u_{k,k} \qquad k = n, n-1, \ldots 1$$

2. ガウス消去法

- 例

前進消去

$$\begin{array}{cc} A & b \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & \boxed{-2} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ -1x_2 - 2x_3 &= -1 \\ 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

後退代入

$$x_3 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$-1x_2 - 0 = -1$$

$$x_2 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$1x_1 + 2 + 0 = 1$$

$$x_1 = -1$$

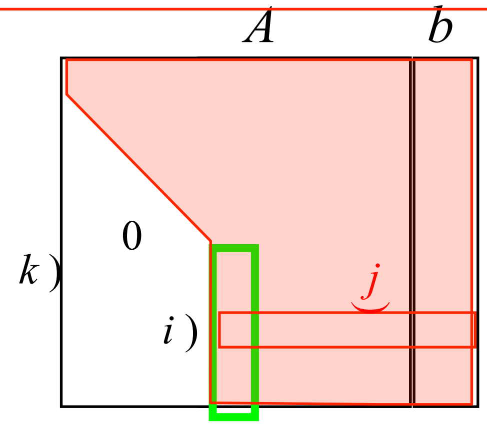
2. ガウス消去法

（前進消去）

ガウス
ジョルダン
とは違う

```
m = n + 1;
for (k=0; k<n-1; k++) {
  for (i=k+1; i<n ; i++) {
    m_ik = Ab[i][k] / Ab[k][k];
    for (j=k; j<m; j++)
      Ab[i][j] -= m_ik * Ab[k][j];
  }
}
```

[A | b] をひとつの配列で表し，
その要素を　Ab[k][j]
(k =0,...,n–1, j =0,...,m–1)
とする



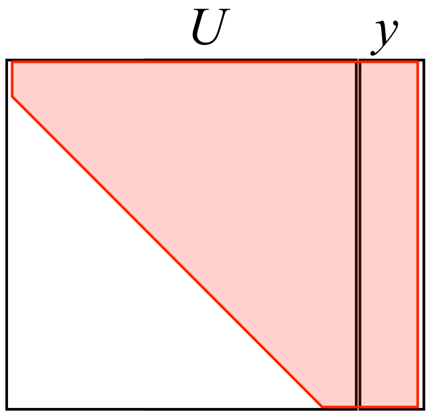
下三角要素を 0 にする．
（基本行演算「<u>ある行</u>のスカラー倍を別の行に加える」を用いる．）

2. ガウス消去法

（後退代入）

```
x[n-1] = y[n-1] / U[n-1][n-1];
for (k=n-2; k>=0; k--){
  x[k] = y[k];
  for (j=k+1; j<n; j++)
    x[k] -= U[k][j] * x[j];
  x[k] /= U[k][k];
}
```

前進消去の結果できたものを[U | y]とし,
U の要素を
u[k][j] (k, j =0,1,...,n–1)とする



$$x_k = \left(y_k - \sum_{j=k+1}^{n-1} u_{k,j} x_j \right) \Big/ u_{k,k} \quad k = n-1, \ldots, 0$$

注意：添え字はC言語の配列風に書いている

2. ガウス消去法

- 演習
  - 次の連立方程式をガウス消去法で解け

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1.2 \\ 1.4 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

2. ガウス消去法

- 前進消去の計算量

```
m = n + 1;
for (k=0; k<n-1; k++) {
  for (i=k+1; i<n ; i++) {
    m_ik = Ab[i][k] / Ab[k][k];
    for (j=k+1; j<m; j++)
      Ab[i][j] -= m_ik * Ab[k][j];
  }
}
```

この計算の回数が最も多い

n が大きいと他は無視できるくらい小さい

この計算の回数は？

$$\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{i=k+1}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n} 1 = \sum_{k=0}^{n-2}\sum_{i=k+1}^{n-1}(n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2}(n-k-1)(n-k) = \sum_{k=0}^{n-2}(n^2-2nk+k^2)+\underline{O(n^2)}$$

n^2 以下の次数

$$= n^3 - n^3 + \frac{1}{3}n^3 + O(n^2) = \frac{1}{3}n^3 + O(n^2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

2. ガウス消去法

- 後退代入の計算量

```
x[n-1] = y[n-1] / U[n-1][n-1];
for (k=n-2; k>=0; k--){
  x[k] = y[k];
  for (j=k+1; j<n; j++)
    x[k] -= U[k][j] * x[j];
  x[k] /= U[k][k];
}
```

この計算の回数が最も多い

n が大きいと他は無視できるくらい小さい

この計算の回数は？

$$\sum_{k=0}^{n-2} \sum_{j=k+1}^{n-1} 1 = O(n^2)$$

3. ガウス-ジョルダン法との計算量比較

ガウスージョルダン法の計算量

```
m = n + 1;
for (k=0; k<n; k++){
  for (j=k+1; j<m; j++)
    AI[k][j] /= AI[k][k];
  AI[k][k]=1.0;
  for (i=0; i<n ; i++){
    if (i==k) continue;
    for (j=k+1; j<m; j++)
      AI[i][j] -=
        AI[i][k] * AI[k][j];
    AI[i][k] = 0.0;
  }
}
```

この計算の回数が最も多い

n が大きいと
他は無視できる
くらい小さい

この計算の回数は？

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n}1=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}(n-k)$$

$$=\sum_{k=0}^{n-2}(n-1)(n-k)=\sum_{k=0}^{n-2}(n^2-nk)+O(n^2)$$

$$=n^3-\frac{1}{2}n^3+O(n^2)=\frac{1}{2}n^3+O(n^2)$$

3. ガウス-ジョルダン法との計算量比較

❍ 乗除算(または加減算)の計算量比較

- ガウス消去法

$$\left.\begin{array}{ll}\cdot\text{前進消去} & \frac{1}{3}n^3+O(n^2) \\ \cdot\text{後退代入} & O(n^2)\end{array}\right\}\ \text{合計}\ \frac{1}{3}n^3+O(n^2)$$

ガウス消去法の方が
速いことが分かる

- ガウス-ジョルダン法

$$\left.\begin{array}{ll}\cdot\text{前進消去} & \frac{1}{2}n^3+O(n^2) \\ \cdot\text{後退代入} & O(n^2)\end{array}\right\}\ \text{合計}\ \frac{1}{2}n^3+O(n^2)$$

4. LU分解法

- LU分解

$$A=\underbrace{\begin{bmatrix}\alpha_{1,1} & 0 & \cdots & 0\\ \alpha_{2,1} & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \alpha_{n-1,n-1} & 0\\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,n-1} & \alpha_{n,n}\end{bmatrix}}_{\substack{L\\ \text{下三角行列}}}\underbrace{\begin{bmatrix}\beta_{1,1} & \cdots & \beta_{1,n-1} & \beta_{1,n}\\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \beta_{n-1,n-1} & \beta_{n-1,n}\\ 0 & \cdots & 0 & \beta_{n,n}\end{bmatrix}}_{\substack{U\\ \text{上三角行列}}}$$

- もし，上のように $A=LU$ と分解できたとすると，$LU\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を解くには
  1) $L\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$ を解く（後退代入．O(n^2) で簡単に解ける）
  2) $U\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ を解く（後退代入．O(n^2) で簡単に解ける）

  と簡単に解くことができる．

- 長所：いろいろな $\boldsymbol{b}$ に対して，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を解くような問題の場合は，一度 $A=LU$ と分解しておけば，後は上の手順で簡単に解ける．

4. LU分解法

❍ では，どのようにして LU分解するか
（$\alpha_{i,i}$ を 1 にしても解ける．クラウトの方法）

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{2,1} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1,1} & \cdots & \beta_{1,n-1} & \beta_{1,n} \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \beta_{n-1,n-1} & \beta_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_{n,n} \end{bmatrix}$$

$j = 1,2,\ldots, n$ に対して

  $i = 1,2,\ldots,j$ に対して

$$\beta_{1,j} = a_{1,j}, \quad \beta_{i,j} = a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_{i,k}\beta_{k,j}$$

  $i = j+1, j+2,\ldots,n$ に対して

$$\alpha_{i,j} = \frac{1}{\beta_{j,j}}\left(a_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_{i,k}\beta_{k,j} \right)$$